SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

D. GUIDETTI

OPERATORI ELLITTICI CHE GENERANO SEMIGRUPPI IN SPAZI LOCALMENTE CONVESSI

10 DICEMBRE 1987

In questo seminario vorrei presentare alcuni risultati di generazione di semigruppi da parte di opportune realizzazioni di operatori ellittici in certi spazi vettoriali topologici non normabili e applicare poi i risultati ad alcune equazioni (o sistemi di equazioni) alle derivate parziali.

Cominciamo col presentare un risultato dovuto a Babalola ([1] e [2]).

Sia X uno spazio loc. convesso, $T = \{T(x) | t \geq 0\}$ un semigruppo fortemente continuo in X. Diremo che T è un semigruppo (Co,1) se $\exists$ una famiglia $\{P_\alpha\}(\alpha \in A)$ di seminorme continue su X, che genera la topologia di X, tale che $\forall \alpha \in A$, $\forall \delta \in [0,+\infty]$, $\forall t \in [0,\delta]$, $\forall x \in X$

(1) $\qquad p_\alpha(T(t)x) \leq C(\alpha,\delta)\, p_\alpha(x)$

I generatori infinitesimali di semigruppi $(C_0,1)$ tali che (1) è soddisfatta per certe costanti $C(\alpha,\delta)$ ammettano la seguente caratterizzazione: $N_\alpha = \{x \in X | p_\alpha(x) = 0\}$ è un sottospazio chiuso di X. Poniamo $X_\alpha = X/_{N_\alpha}$. Se $[x]_\alpha$ è il laterale di N_α che contiene x, poniamo $\|x\|_\alpha = p_\alpha(x)$ · $(X_\alpha \|\cdot\|_\alpha)$ è uno spazio normato. Indicheremo con $\bar{X}_\alpha$ il suo completamento.

A è generatore di un semigruppo soddisfacente (1) se e solo se

(α) A è chiuso a dominio denso

(β) $\forall x \in D(A)$ $\forall \alpha \in A$, $p_\alpha(x) = 0 \Rightarrow p_\alpha(Ax) = 0$. Ciò permette di definire A_α su X_α:

$A_\alpha[x]_\alpha = [Ax]_\alpha$ Allora:

(γ) A_α è chiudibile in $\bar{X}_\alpha$.

Indicata con $\bar{A}_\alpha$ la chiusura di A_α,

(δ) $\forall \alpha \in A \ \exists \sigma_\alpha, \mu_\alpha$ tali che $\lambda > \sigma_\alpha \Rightarrow \lambda \in \rho(\bar{A}_\alpha)$,

$$\|(\lambda-\bar{A}_\alpha)^{-n}\|_{\mathscr{L}(\bar{X}_\alpha)} \leq M_\alpha(\lambda-\sigma_\alpha)^{-n} \quad \forall n \in N.$$

Sia $A(x,\partial) = (-1)^{m+1} \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq m} \partial^\alpha(a_{\alpha,\beta}(x)\partial^\beta)$ a coefficienti in $B^\infty(R^n)$ uniformemente fortemente ellittico (cioè $\mathrm{Re}(\sum_{|\alpha|,|\beta|=m} a_{\alpha,\beta}(x)\xi^{\alpha+\beta}) \geq \nu|\xi|^{2m}$ con $\nu > 0$.

Poniamo $D(A) = H^\infty(R^n)$, $Au = A(x,\partial)u$. A è generatore infinitesimale di un semigruppo $C(0,1)$ in $H^\infty(R^n)$. Infatti, per $j = 0,1,\dots,$ Poniamo $p_j(u) = (\sum_{|\alpha| \leq j} \int_{R^n} |\partial^\alpha u|^2 dx)^{1/2}$. In questo caso lo spazio $\bar{X}_j$ può essere identificato con $H^j(R^n)$.

(α) è soddisfatta perchè A è continuo su $H^\infty(R^n)$.

(β) è soddisfatta perchè $\forall j$ p_j è una norma su $H^\infty(R^n)$.

(γ) è di facile verifica che si ha

$$\forall j \in N, \quad D(A_j) = \{u \in H^j(R^n) \mid A(x,\partial)u \quad H^j(R^n)\}$$

(δ) segue dalla disuguaglianza di Garding generalizzata: $\forall j \in N$, $u \in H^\infty(R^n)$,

$$\mathrm{Re} < A(x,\partial)u, u > \ \leq C_j \|u\|_j^2 - c_j\|u\|_{m+j}^2$$

(per certe costanti $C_j, c_j > 0$), da cui, se $\lambda > C_j$,

$$\|\lambda u - Au\|_j \|u\|_j \geq \mathrm{Re} < \lambda u - Au, u > \ \geq (\lambda - C_j)\|u\|_j^2.$$

Veniamo ora ad alcuni risultati contenuti in [3].

Consideriamo un sistema di N equazioni in N incognite:

$$A(x,\partial) = (A_{ij}(x,\partial))_{\substack{i = 1,\dots,N \\ j = 1,\dots,N}}$$

in R^n con operatori $A_{ij}(x,\partial)$ di ordine $\leq m$.

Diremo che $A(x,\partial)$ è ellittico, se, indicata con $\overset{\circ}{A}_{ij}(x,\partial)$ la parte di ordine m di $A_{ij}(x,\partial)$, si ha che $\forall \xi \in R^n$, $|\xi| = 1$, la matrice

$$\overset{\circ}{A}(x,\xi) = (\overset{\circ}{A}_{ij}(x,\xi))_{\substack{i = 1,\dots,N \\ j = 1,\dots,N}}$$

è invertibile.

Supponiamo che inoltre:

(i) $A_{ij}(x,\partial) = \sum_{|\alpha|\leq 2p} a_{ij\alpha}(x)\partial\alpha$, con coefficienti di classe $B^{|\alpha|}(R^n)$ e derivate di ordine $|\alpha|$ uniformemente hölderiane.

(ii) $A(x,\partial)$ è ellittico $\forall x \in R^n$ ed esiste $\lambda_0 > 0$ tale che $\forall \xi \in R^n$, con $|\xi|=1$, gli autovalori della matrice $\overset{\circ}{A}(x,i\xi)$ hanno tutti parte reale $\leq -\lambda_0$.

In [4] e [5] sono introdotti i seguenti spazi: per $r \in R$, poniamo

$$K_r(R^n) = \{u \in C(R^n;C^N) \mid \forall b>0 \quad \exp(-b|x|^r)u \in L^\infty(R^n;C^N)\}$$

K_r è uno spazio di Frechêt, con le norme

$$\|u\|_{r,b} = \|\exp(-b|x|^r)u\|_\infty.$$

Poniamo ora $q = \frac{2p}{2p-1}$. Si ha:

Teorema 1. Definiamo $D(A_q) = \{u \in K_q | A(x,\partial)u \in K_q\}$ ($A(x,\partial)u$ è una distribuzione $\forall u \in K_q$ in virtù di (1)), $A_q u = A(x,\partial)u$.

Allora

(i) A_q è il generatore infinitesimale di un semigruppo in K_q (che chiameremo $\{T(t) | t\geq 0\}$)

(ii) $\forall t > 0, \forall f \in K_q$ $T(t)f \in D(A_q)$

(iii) $\forall f \in K_q \quad \lim_{t\to 0} tAT(t)f = 0$

Dim. (Cenno). Col metodo di Levi ci si può costruire una soluzione fondamentale per $\partial_t - A(x,\partial_x)$ (vedi [6]) che chiameremo $\Gamma(x,t,\xi)$, soddisfacente per ogni t>0

$$\|\Gamma(x,t,\xi)\| \leq \frac{C(t)}{(t-\tau)^{\frac{n}{2p}}} \exp(-c\,(\frac{|x-\xi|^{2p}}{t})^{\frac{1}{2p-1}}$$

Ciò permette di definire $\forall f \in K_q$

$$T(t)f(x) = \begin{cases} \int_{R^n} \Gamma(x,t,\xi)f(\xi)d\xi & \text{se } t>0 \\ f(x) & \text{se } t=0 \end{cases}$$

Si verifica che $T(t) \in \mathscr{L}(K_q)$ $\forall t \geq 0$,

$$\lim_{t\to o} T(t)f = f \quad \forall f \in K_q, \quad T(t)f \in D(A_q) \; \forall t > 0,$$

$$\frac{d}{dt}T(t)f = AT(t)f \quad \forall t>0 \quad \text{e} \quad \lim_{t\to o} tAT(t)f = 0 \quad \forall f \in K_q.$$

Si prova poi il seguente lemma:

Lemma. Sia $u \in C([0,+\infty[;\, K_q) \cap C'(]o,+\infty[;\, K_q)$, tale che

(1) $u(t) \in D(A_q)$ $\forall t > 0$

(2) $\frac{du}{dt}(t) = A_q u(t)$ $\forall t > 0$

(3) $u(o) = 0$

Allora $u(t) = 0$ $\forall t \geq 0$.

Da ciò si ha che $\forall f \in K_q$ posto $u(t) = T(t)T(s)f - T(t+s)f$, u soddisfa (1), (2), (3) e quindi $T(t)T(s) = T(t+s)$.

Resta da provare che il generatore del semigruppo è A_q. Sia $\hat{A}$ il generatore, $f \in D(\hat{A})$. Per $t > 0$

$$\frac{dT}{dt}(t)f = \hat{A}T(t)f = A_q T(t)f. \quad E' \hat{A}T(t)f \xrightarrow[t\to 0]{} \hat{A}f$$

A_q è chiuso e quindi $f \in D(A_q)$, $A_q f = \hat{A} f$.

Viceversa, poniamo $u(t) = T(t)f - f - \int_0^t T(s)A_q f ds$, con $f \in D(A_q)$

E' $\forall t>0$ $\frac{du}{dt} = A_q T(f)f - T(t)\, A_q f, \forall t>0$ $A_q u(t) = A_q T(t)f - A_q f - \hat{A} \int_0^t T(s) A_q f ds =$

$$= A_q T(t)f - A_q f - T(t)A_q f + A_q f = \frac{du}{dt}(t)$$

Da $u(0) = 0$ e dal lemma segue

$$T(t)f - f = \int_0^t T(s)A_q f ds \quad \text{da cui}$$

$$\frac{T(t)f-f}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)A_q f ds \xrightarrow[t\to 0]{} A_q f.$$

Ciò prova che $f \in D(\hat{A})$ e $\hat{A}f = A_q f$.

Veniamo ora a considerare il sistema ellittico $A(x,\partial)$ (che supponiamo a coefficienti in $B^\infty(R^n)$) nello spazio $S'(R^n)^N = (S(R^n)^N)'$.

Poichè $S(R^n)^N$ è uno spazio riflessivo (anzi di Montel), utilizzando la teoria dei semigruppi duali negli spazi localmente convessi (vedi [7]) e il fatto che l'aggiunta formale $A'(x,\partial)$ di $A(x,\partial)$ soddisfa le stesse proprietà di $A(x,\partial)$, otterremo i risultati che ci interessano per $S'(R^n)^N$ lavorando in $S(R^n)^N$.

In tale spazio, si può definire come prima

$$T(t)f(x) = \begin{cases} \int_{R^n} \Gamma(x,t,s)f(\xi)d\xi & \text{se } t>0 \\ f(x) \text{ se } t = 0 \end{cases}$$

Con una serie di stime, si può verificare che $\forall f \in S(R^n)^N$,

$\forall t \geq 0$ $T(t)f \in S(R^n)^N$ e $\lim_{t\to o} T(t)f = f$ (in $S(R^n)^N$), in modo tale che, posto

$D(A_S) = S(R^n)^N$, $A_S f = A(x,\partial)f$, si prova che A_S genera un semigruppo in $S(R^n)^N$.

Posto $D(A_{S'}) = S'(R^n)^N$, $A_{S'}f = A(x,\partial)f$ $\forall f \in D(A_{S'})$, per dualità si

ha che $A_{S'}$ genera un semigruppo in $S'(R^n)^N$.

Vogliamo ora mettere in luce una notevole proprietà di tale semigruppo.

Sia T un semigruppo in uno spazio localmente convesso. Diremo che $T = \{T(t)|t\geq 0\}$ è quasi equicontinuo se $\exists \omega\geq 0$ tale che $\{e^{-\omega t}T(t)|t\geq 0\}$ è equicontinuo.

E' ben noto che in ogni spazio di Banach ogni semigruppo C_o è quasi equicontinuo.

In generale questo risultato è falso in uno spazio localmente convesso. Ad esempio consideriamo lo spazio $K_2(R) = \{u \in C(R;C) | \forall b>0 \ \exp(-bx^2)u \in L^\infty(R)\}$.

Indichiamo con A l'operatore: $D(A) = \{u \in K_2(R) | u'' \in K_2(R)\}$, $Au=u''$.

Abbiamo già provato che A è generatore di un semigruppo in K_2.

Se tale semigruppo $\{T(t)|t\geq 0\}$ fosse equicontinuo esisterebbe in particolare $\omega\geq 0$ tale che $\forall f \in K_q$, $\forall x \in R$ $e^{-\omega t}T(t)f(x) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} o$. Poniamo $f\delta(x) =$ $= \exp(\delta x)$. Si ha $T(t)f\delta(x) = \exp(\delta^2 t+\delta x)$. Evidentemente, non esiste alcun ω tale che $\exp(-\omega t+\delta^2 t+\delta x) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} o$ $\forall \delta \in R$, $\forall x \in R$.

Tuttavia, sullo spazio $S(R^n)^N$, A_S genera un semigruppo quasiequicontinuo.

<u>Teorema 2.</u> L'operatore $A_{S'}$ è il generatore infinitesimale di un semigruppo quasi equicontinuo in $S'(R^n)^N$.

<u>Dim.</u> (Cenno). Con i soliti argomenti di dualità ci si può limitare a provare il risultato nel caso di A_S e $S(R^n)^N$. Introduciamo su $S(R^n)^N$ la famiglia di seminorme

$$\|f\|^{m,k,\mu} = \sup_{\substack{|\alpha|\leq K \\ x\in R^n}} \|(1+|x|)^m \partial^\alpha f\|_\infty + \sum_{|\alpha|=K} [\partial^\alpha f]_\mu$$

ove $m\geq 0$, $K \in N$, $\mu\in]0,1[$, $[g]_\mu = \sup_{\substack{x,y\in R^n \\ x\neq y}} \frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|^\mu}$.

Si ha:

<u>Lemma</u> $\exists \rho\geq 0$ tale che $\forall m,m'\geq 0$ con $m<m'$, μ, $\nu\in]0,1[$ con $\mu<\nu$, $\exists C>0$, $\alpha,\beta >-1$ tali che

$$\|T(t)f\|_{m,2p,\mu} \leq C(t^\alpha+t^\beta)\, e^{\rho t}\|f\|_{m',0,\nu} \quad (*)$$

Dal lemma segue che $\forall r\geq 2p$, $\forall m,m'\geq 0$ con $m < m'$, $\forall \mu,\nu\in]0,1[$ con $\mu < \nu$ $\exists C>0$, $\alpha,\beta>-1$ tali che

$$\|T(t)f\|_{m,r,\mu} \leq C(t^\alpha+t^\beta)e^{\rho t}\, \|f\|_{m',r-2p,\nu}$$

Infatti, si può vedere che

$$\partial^\beta_x\, T(t)f = T(t)\partial^\beta_x f + \int_0^t T(t-s)g_\beta(s)ds$$

con $g(t) = \sum_{\gamma<\beta} \binom{\beta}{\gamma} A^{(\beta-y)}(x,\partial)\, \partial_x^\gamma T(t)f$

Proviamo l'ultima stima per induzione su $r \geq 2p$. Se $r = 2p$, abbiamo il lemma. Supponiamo vero il risultato per un certo r. Sia $|\beta| = r+1-2p$. Basta provare che

$$\|\partial_x^\beta T(t)f\|_{m,2p,\mu} \leq C\, e^{\rho t}(t^\alpha + t^\beta)\|f\|_{m',|\beta|,0}$$

Vale

$$\|\partial_x^\beta T(t)f\|_{m,2p,\mu} \leq \|T(t)\partial_x^\beta f\|_{m,2p,\mu} +$$

$$+ \int_0^t \|T(t-s)\, g_\beta(s)\|_{m,2p,\mu} ds$$

Per il lemma

$$\|T(t)\partial_x^\beta f\|_{m,2p,\mu} \leq C\, e^{\rho t}(t^{\alpha_1} + t^{\beta_1})\| f \|_{m',|\beta|,0}$$

Inoltre

$$\|T(t-s) g_\beta(s)\|_{m,2p,\mu} \leq C_2\, e^{\rho(t-s)}((t-s)^{\alpha_2} + (t-s)^{\beta_2})\, \|g_\beta(s)\|_{m'',0,\mu'} (m<m''<m'', \mu<\mu'<\nu)$$

$$\|g_\beta(s)\|_{m'',0,\mu'} \leq \text{Cost}\ \ \text{Cost}\|T(s)f\|_{m'',|\beta|-1+2p,\mu'} \leq$$

$$\leq \text{(per l'ipotesi induttiva)}\ \ \text{cost}\ e^{\rho s}(s^{\alpha_3} + S^{\beta_3})\|f\|_{m';|\beta|-1,\nu}$$

Quindi

$$\|\partial_x^\beta T(t)f\|_{m,2p,\mu} \leq e^{\rho t}(t^{\alpha_1}+t^{\beta_1})\|f\|_{m',|\beta|,\nu}+$$

$$+\ \mathrm{cost}\ e^{\rho t}\int_0^t [(t-s)^{\alpha_2} + (t-s)^{\beta_2}](S^{\alpha_3} + S^{\beta_3})ds\ \ \|f\|_{m',|\beta|-1,}$$. Da ciò si ha (*).

Da (*) segue subito che, $\forall\omega>\rho$

$$\{e^{-\omega t}T(t)|t \geq 1\} \text{ è equicontinuo.}$$

Poichè $S(R^n)^N$ è un t-spazio, $\{e^{-\omega t}T(t)|t \in [0,1]\}$ è equicontinuo e ciò prova che $\{T(t)|t\in [o,+\infty[\}$ è quasi equicontinuo. E' ben noto che i semigruppi quasi equicontinui sono quelli a cui è applicabile la teoria di Hille-Yosida.

Come corollario si ha perciò che:

<u>Corollario 3.</u> Se $A(x,\partial)$ è un sistema ellittico con le proprietà dichiarate, il problema

$$\lambda u - A(x,\partial)u = f$$

ha una e una sola soluzione in $S'(R^n)^N$ per ogni $f\in S'(R^n)^N$, $\forall\lambda$ reale abbastanza grande.

Ricordiamo ora la seguente definizione: (vedi [7]).

Sia $T = \{T(t)|t \geq 0\}$ un semigruppo quasi equicontinuo in uno spazio localmente convesso X e sia X' lo spazio duale di X. Diremo che T è analitico se $\exists\theta_o>0$ tale

che T ammette un'estensione quasi-equicontinua al settore $S_{\theta_0}=\{z\in C \mid |\arg z|\leq\theta_0\}$ e per ogni $x'\in X'$, $x\in X$, la funzione $z \to \langle T(z)x,x'\rangle$ è analitica in $\overset{\circ}{S}_{\theta_0}$ ($T(z)$ è il valore assunto dal prolungamento in z).

Vale il seguente risultato

Teorema 4. Supponiamo che esista $\phi_0 > \pi/2$ tale che $\forall\xi\in R^n$, $|\xi|=1$, $\forall x\in R^n$ gli autovalori di $\overset{\circ}{A}(x;i\xi)$ siano della forma $-\lambda_0+\rho e^{i\theta}$ con $\pi\geq|\theta|\geq\phi_0$. Allora il semigruppo generato da A è analitico in $S'(R^n)^N$.

Osserviamo che le ipotesi del teorema sono soddisfatte se, ad esempio, l'operatore è a coefficienti costanti.

Veniamo ora ad alcune applicazioni.

E' evidente che i risultati precedenti consentono di trattare sistemi parabolici in spazi di funzioni o distribuzioni non normabili. Più in generale, sono stati considerati (vedi ad. es. [5]), problemi riconducibili a una forma astratta del tipo

$$\sum_{j=1}^{m} b_j(t)\frac{\partial u}{\partial t_j}(t)+c(t)u(t)-Au(t) = f(t) \quad , \quad t\in 0$$

$$u(t) = u_0(t) \quad \text{se} \quad t\in\partial 0. \qquad (**)$$

Qui 0 è un aperto connesso di R^m, $\partial 0$ è di classe C^1, 0 giace su un lato di $\partial 0$ b è un campo vettoriale di classe C^1 definito su $\bar{0}$ tale che:

(a) $b(t) \neq 0 \quad \forall t\in\bar{0}$

(b) $b(t)\cdot\nu(t) > 0 \quad \forall t\in\partial 0$ ($\nu(t)$ è la normale interna ad 0 in t)

(c) Sia $s\to S(s,t)$ la soluzione massimale di

$$\frac{dv}{ds}(s) = b(v(s))$$

$$v(o) = t$$

Allora $\forall t \in \bar{O}$ $\exists t' \in \partial O$ tale che $t = S(s,t')$. Su c supporremo soltanto che sia di classe C^1 su $\bar{O}$. Infine, X sarà un generico t-spazio sequenzialmente completo, A il generatore di un semigruppo in X soddisfacente

(d) $T(t)x \in D(A)$ $\forall t > 0$, $\forall x \in X$

(e) $\lim_{t \to 0} tAT(t)x = 0$ $\forall x \subset X$.

Infine $f \in C'(\bar{O};X)$.

Per soluzione del problema intenderemo una $u \in C'(O;X) \cap C(\bar{O};X)$ tale che $\forall t \in O$ $u(t) \in D(A)$ e soddisfa l'equazione in O e la condizione al contorno su ∂O. Ci interessano soluzioni del sistema definite su tutta $\bar{O}$.

In virtù delle ipotesi, si può definire $\Phi : \bar{O} \to R \times \partial O$ tale che $\Phi(t) = (\Phi_1(t), \Phi_2(t))$ con $S(\Phi_1(t), \Phi_2(t)) = t$. Formalmente la soluzione del problema è

$$u(t) = W(\Phi_1(t),t)^{-1} \exp(\Phi_1(t)A) \; u_o(\Phi_2(t)) +$$

$$+ \int_0^{\Phi_1(t)} \exp((\Phi_1(t)-\sigma)A) \; W(\Phi_1(t),t)^{-1} \; W(\sigma,t) \; f(S(-\Phi_1(t),t))d6,$$

con $W(s,t) = \exp(\int_0^s c(S(6-\Phi_1(t),t))d6$.

Si può provare che Φ è di classe C^1 su $\bar{O}$. Ciò consente di ricavare che la soluzione formale scritta è una soluzione vera se $g \in C^1(\partial O,X)$.

Nel caso $O = R^+$, $b(t) \equiv 1$, basta supporre f localmente hölderiana a valori in X.

Osserviamo infine che le condizioni (d) e (e) caratterizzano i semigruppi analitici negli spazi di Banach.

In generale, ciò è falso in uno spazio localmente convesso. Si consideri, ad esempio, lo spazio $X = \mathscr{E}'(R)$ e il semigruppo in X delle traslazioni. Il suo generatore è $\frac{d}{dt}$ che soddisfa (d) e (e) perchè è continuo in X. Tuttavia, se f non è analitica, $T(t)f = f(\cdot + t)$ non ammette alcuna

ragionevole estensione analitica su un settore che contiene R^+.

BIBLIOGRAFIA

[1] V.A. BARBALOLA, Trans. A.M.S. vol. 199 (1974), 163-180.

[2] ――――――――, Stud. Math. vol. 50 (1974), 117-125.

[3] D. GUIDETTI, "On certain semigroups of linear operators and generalized Cauchy problem", preprint.

[4] GELFAND-SHILOV, "Generalized functions", vol. III, Academic Press, 1964.

[5] VLADIMIROV-DROZZINOV, Math. of the USSR Izvestiae, vol. 1-II, 1285-1303 (1967).

[6] A. FRIEDMAN, "Partial differential equations of parabolic type", Prentice Hall. Inc. 1964.

[7] K. YOSIDA, "Functional Analysis", Springer Verlag, 1980.